E-Content

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India

Subject / Course – Physics

Paper : Amwaaj-O-Ehtezaz, Ilm-e-Manazir

Module Name/Title : Oscillation (Ehtezaz)

DEVELOPMENT TEAM	
CONTENT	Prof. S.A. Wahab
PRESENTATION	Prof. S.A. Wahab
PRODUCER	Rizwan Ahamd

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India
//imcmanuu

اکائی 13 سادہ موسیقی حرکت Simple Harmonic Motion

Structure ساخت

13.1 اغراض و مقاصد

یہ اکائی سادہ موسیقی حرکت کی خصوصیات پر بحث کرتی ہے ۔ اس حرکت کے مفہوم اور خصوصیات کو قابل فہم بنانے کے لیے (1) موسیقی حرکت کرنے والے ذرہ کی توانائی بالقوہ کو محسوب کیا گیا (2) اور سادہ موسیقی اہتزازیہ (Oscillator) کی مساوات کو حسابی طریقہ سے اخذ کیا گیا اور اس کے حل کا تجزیہ کیا گیا۔

اس اکائی کو مکمل کر لینے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ دو سادہ موسیقی حرکتوں کے حاصل کی حرکت کی شکل کو جو ایک خط مستقیم یا دائرہ یا ناقص کے مانند ہوتی ہے، بیان کر سکیں نیز یہ بھی بیان کر سکیں گے کہ حاصل کی شکل کا انحصار حرکتوں کے تعدد، ان کے درمیان تفاوت ہیت اور ان کے حیطہ ارتعاش پر ہوتا ہے۔

13.2 تمہید

ہر وہ حرکت جو ایک معینہ وقفہ کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہو، دوری حرکت یا موسیقی حرکت کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی حرکت، اور زمین کے گرد چاند کی حرکت، دوری حرکت کی مثالیں ہیں۔ اگر دوری حرکت کرنے والا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے حرکت کرتا ہے تو اس کی اس طرح کی حرکت کو اہتزازی حرکت کہتے ہیں۔ روزمرہ کی زندگی میں ہمیں بے شمار اہتزازی حرکتوں سے سابقہ پڑتا ہے۔ سادہ رقاص کے کرے کی حرکت یا انتصابی سمت میں لٹکائے ہوئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم کو کسی قدر نیچے کھینچ کر چھوڑ دینے پر جسم میں پیدا ہونے والی حرکت اہتزازی حرکت کی مثالیں ہیں، یہ سب دراصل میکانی (Mechanical) اہتزاز ہیں۔ اہتزازوں کی اور بھی قسمیں ہیں۔ ریڈیو اور نور کی امواج، برقی اور مقناطیسی میدانوں کے سمتیوں کے اہتزاز کا نتیجہ ہیں۔ سالمات کے جواہر میں بھی اہتزازی حرکت ہوتی ہے۔

13.3 موسیقی حرکت

جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے۔ ہر حرکت جو خود کو مسلسل دہرا رہی ہو، موسیقی حرکت کہلاتی ہے۔ ایک اہتزاز کو مکمل کرنے کے لیے درکار وقت کو، وقت دوران (T) کہا جاتا ہے۔ اکائی وقت میں تکمیل پانے والے اہتزازوں کی تعداد کو، تعدد (f) کہتے ہیں۔

$$f = \frac{1}{T} \qquad (13.1)$$

ایم۔ کے۔ ایس نظام میں تعدد کی اکائی کو سائیکل فی ثانیہ یا صرف ہرٹز (Hertz) (نہ کہ ہرٹز فی ثانیہ) کہا جاتا ہے۔
اب ہم ایک میکانی اہتزازی حرکت پر غور کریں گے۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ، ایک خط مستقیم پر معینہ حدود کے مابین بموجب شکل (13.1) حرکت کرتا ہے۔

شکل (13.1) "m" کمیت والا ذرہ مقامات A اور B کے مابین حالت اہتزاز میں ہے۔

وہ مقام، جہاں ذرے پر عمل پیرا قوت صفر ہوتی ہے، ذرہ کا مقام توازن (Equilibrium Position) کہلاتا

ذرے پر عمل پیرا قوت اور اس سے پیدا ہونے والے اسراع اور اس کی رفتار، قدر اور سمت ایک دوری (Periodic) وضع میں متغیر ہوتے رہتے ہیں۔ موسیقی طور پر حرکت پذیر ذرے کی توانائی بالقوہ کی قیمت اس کے مقام توازن پر اقل ترین ہوتی ہے کیونکہ اس مقام پر قوت کی جملہ محصلہ قیمت (Net Force) صفر ہوتی ہے۔ آپ کو یاد ہوگا کہ اکائی (2) میں ہم نے یہ فرض کیا تھا کہ جب کبھی جسم پر عامل قوتوں کا حاصل صفر ہو، نظام کی توانائی بالقوہ بھی صفر ہوگی۔

کسی مقام پر ذرے پر عمل کرنے والی قوت کو اس کی توانائی بالقوہ کے تفاعل (4) کی مدد سے مساوات ذیل کے ذریعہ حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$F = -\frac{du}{dX} \qquad (13.2)$$

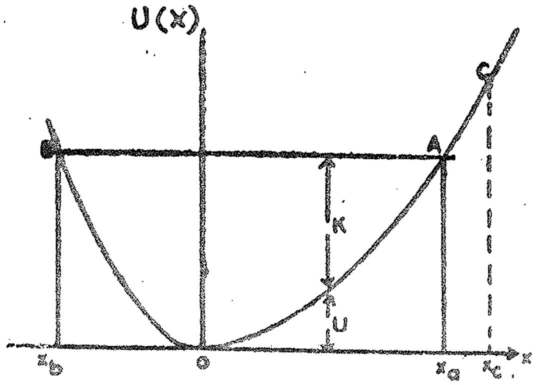
یہ قوت ایک بحالی قوت (Restoring Force) ہے کیونکہ اس کی کوشش ہمیشہ یہی ہوتی ہے کہ ذرے میں مقام توازن کی سمت اسراع پیدا کرے۔

اہتزاز کرنے والے ذرے کے لیے مجموعی میکانی توانائی ہوگی۔

$$E = K + U \qquad (13.3)$$

جہاں K، توانائی بالحرکت ہے اور U توانائی بالقوہ۔ اگر حاصل قوت غیر بقائی (Non_Conservative) نوعیت کی ہو مثلاً رگڑ کی قوت، تو مجموعی توانائی "E" مستقل یعنی غیر متبدل رہے گی۔

شکل (13.2) میں توانائی بالقوہ کی ایک قسم کو (X) کے تفاعل کے طور پر مرتسم کیا گیا ہے۔



شکل (13.2) موسیقی حرکت کی صورت میں توانائی بالقوہ (u) فصل (x) کے تفاعل کے طور پر جہاں فاصلہ (x) کو ذرے کے مقام توازن سے ناپا گیا ہے۔

منحنی کے کسی نقطہ پر کا ڈھلان (Slope) اس مقام پر ذرے پر عمل کرنے والی قوت کی عددی تعبیر ہے کیونکہ

$$\left(F = -\frac{du}{dX}\right)$$

مقام توازن " o " پر ڈھلان صفر ہے ۔ اس کو صفر ہی ہونا چاہیئے کیوں کہ ذرے پر عمل کرنے والی حاصل قوت مقام توازن پر صفر ہے ۔

فرض کرو کہ مجموعی توانائی " E " کو معین (Ordinate) مان کر ، فاصلے کے محور کے متوازی ایک خط کھینچا گیا جو توانائی بالقوہ کی منحنی کو مقامات A اور B پر قطع کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ ان نقاط کے فصلے (Abscissas) بالترتیب x_a اور x_b ہیں جن سے ذرے کی حدود حرکت کا تعین ہوتا ہے ۔ ذرہ اس توانائی " E " کے ساتھ ان حدود سے تجاوز نہیں کر سکتا ۔ اس کو ذیل میں سمجھایا گیا ہے ۔

فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ " C " کے لئے فصلہ X_c ہے اور $x_c > x_a$ یعنی اس نقطہ کے لیے توانائی بالقوہ ، ذرے کی مجموعی توانائی سے متجاوز ہوگئی ہے ۔ اور مساوات (13.3) کی رو سے ذرے کی توانائی بالحرکت منفی ہوگئی ہے ۔ یہ ناممکن ہے ۔ اس طرح معلوم ہوا کہ حدود اہتزاز کا تعین ، اس کی مجموعی توانائی " E " سے کیا جاتا ہے ۔ E کی مختلف قیمتوں کے لئے ذرے کی اہتزازی حدیں بھی بدل جاتی ہیں ۔ ان حدود کو نقاط واپسی (Turning Points) کہا جاتا ہے کیوں کہ ان نقاط پر ذرہ حالت سکون اختیار کرنے کے لیے مجبور ہوجاتا ہے اور اس کے بعد وہ لوٹ جاتا ہے اور اسی راستے پر واپسی کا سفر شروع کرتا ہے جس سے کہ وہ آیا تھا ۔ مزید یہ کہ X_a اور X_b کو ہمیشہ ہی مساوی ہونا ضروری نہیں ہے ۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے ۔

ہرٹز (Hertz) ______ کی اکائی ہے ۔

13.4 سادہ موسیقی اہتزازیہ

اب تک (U) کو صرف ایک تفاعل سمجھا گیا ۔ یہ نہیں بتلایا گیا کہ یہ کس قسم کا تفاعل ہے ۔ اب اس تفاعل کو ایک مخصوص عملی وضع دی جائے گی جو طبیعیات میں ایک بڑی اہمیت کی حامل ہے ۔

فرض کرو کہ ایک ذرے کی اہتزازی حرکت ایک ایسے قوہ کے تحت ہورہی جو X کا ایک تفاعل ہے جسے ذیل میں دیا گیا ہے ۔

$$u(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (13.4)$$

جہاں " k " ایک مستقل ہے ۔ اور

$$F(x) = \frac{dy}{dx} = -Kx \qquad (13.5)$$

اس خاص صورت میں ہی "ذرہ" سادہ موسیقی اہتزازیہ کہلاتا ہے اور اس کی حرکت، سادہ موسیقی حرکت مانی جاتی ہے اسی صورت میں توانائی بالقوہ کی منحنی محور Y۔ کے گرد متشاکل ہوگی اور یہی خصوصیت مساوات (13.4) سے بھی ظاہر ہو رہی ہے اور ذرے کی حرکت کے حدود مقام توازن سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں یعنی $x_a = x_b$

مساوات (13.4) سے ظاہر ہونے والا توانائی بالقوہ کا تفاعل ایک ایسے مثالی (Ideal) اسپرنگ کا قوہ بھی ہوگا جس کی قوت کا مستقل k (Force Constant) ہے جب کہ اس کو بقدر (X) کے دبایا یا کھینچا گیا ہو۔ اکائی 2 میں مثالی اسپرنگ کی تعریف یوں کی گئی تھی کہ یہ ایک ایسا اسپرنگ ہے جس کا قوتی مستقل $f(x) = -kx$ مساوات سے حاصل ہو سکتا ہے (جو ہکس (Hooks) کے قانون کے مطابق ہے) اور یہ وہی مساوات ہے جس کو (13.5) میں حاصل کیا گیا ہے۔ لہذا اگر "m" کمیت والے ایک جسم کو ایک مثالی اسپرنگ سے جوڑ دیا جائے اس طرح کہ یہ ایک بے رگڑ افقی سطح پر حرکت کرنے کے لیے آزاد ہو تو یہ جسم بھی ایک سادہ موسیقی اہتزازیہ کی مثال بن سکتا ہے۔

ایک سادہ رقاص، جو ایک چھوٹے زاویہ اہتزاز میں مرتعش ہے، ایک برقی رو کا سرکٹ (Circuit) جو امالہ I (Induction) اور گنجائش C (Capacitance) پر مشتمل ہے سادہ موسیقی اہتزازیوں کی دیگر مثالیں ہیں۔ ان کی تفہیم آئندہ کی جائے گی۔ بہت سی پیچیدہ قسم کی حرکتوں کی انفرادی سادہ موسیقی حرکتوں کا مجموعہ مان کر ان کی تشریح کرنا ایک ممکن العمل امر ہے۔ لہذا سادہ موسیقی حرکت کا تفصیلی مطالعہ، قدیم اور جدید طبعیات کے کئی مظاہر کے ادراک کے لئے بنیادی مقام رکھتا ہے۔

13.5 سادہ موسیقی حرکت کی مساوات

مساوات (13.5) پر غور کیجیے۔ اور نیوٹن کے دوسرے کلیہ کا اس پر اطلاق کیجیے یعنی

$$\vec{F} = \text{کمیت} \times \text{اسراع} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{یا} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kX$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (13.6)$$

یہ سادہ موسیقی حرکت کو بتلانے والی تفرقی مساوات ہے۔

اگر کسی دیئے ہوئے وقت پر ذرے کے مقام کو معلوم کرنا ہو تو (X) کو وقت کا ایسا تفاعل ہونا چاہیے جو مساوات 13.6 کو، وقت کی تمام قیمتوں کے لیے پورا کر سکے۔ فرض کرو کہ اس قسم کا ایک عام حل ذیل کی مساوات کے مانند ہے یعنی

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (13.7)$$

یہاں A، ω اور δ مستقل مقداریں ہیں جن کے طبیعی مفہوم تھوڑی ہی دیر میں واضح ہو جائیں گے۔

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x \quad (13.8)$$

مساواتوں (13.6) اور (13.8) کے تقابل سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم مستقلات کا ایسا انتخاب کریں کہ

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ہو تو} \quad x = A \cos(\omega t + \delta) \quad (13.9)$$

جو مساوات (13.6) کا صحیح حل ہے یعنی یہہ سادہ موسیقی اہتزازیہ کی مساوات ہے۔

13.5.1 " ω " کا طبیعی مفہوم اور اہمیت

فرض کرو کہ کسی وقت " t " پر ذرے کا نقل مکان x_1 ہے، تب

$$x_1 = A \cos(\omega t + \delta)$$

اگر وقت میں $\frac{2\pi}{\omega}$ کا اضافہ کردیا جائے اور اس کے بعد اس کا نقل مکان " X_2 " ہوجائے تو

$$x_2 = A \cos\left\{\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right\}$$

$$= A \cos(\omega t + 2\pi + \delta)$$

$$= A \cos(\omega t + \delta)$$

یعنی اس کا مطلب یہ ہوا کہ ہر وقفہ $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ کے بعد تفاعل میں تکرار واقع ہو رہی ہے۔ یعنی ہر بار اسی قیمت کا اعادہ ہورہا ہے۔ بالفاظ دیگر وقفہ $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ حرکت کا وقت دوران " T " ہے اور مساوات 13.9 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

اس طرح مساوات 13.6 سے ظاہر ہونے والی تمام حرکتوں کا وقت دوران ایک ہی ہے جس کی تخمین مرتعش ذرے کی کمیت m اور قوت کے مستقل (k) سے کی جاتی ہے۔ اہتزاز کا تعدد ہوگا۔

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore \omega = 2\Pi f = \frac{2\Pi}{T} \quad (13.10)$$

13.5.2 "A" کا طبیعی مفہوم اور اہمیت

مقام توازن سے ذرے کے نقل مکان کی قیمت اعظم ہوگی جبکہ $A\,Cos(\omega t+\delta)$ اعظم ہو چونکہ (Cosine) تفاعلوں کی اعظم ترین قیمت ایک ہوتی ہے اس لیے ہمیں $(X)_{max} = A$ حاصل ہوگا جو حرکت کا حیطہ ارتعاش ہے چونکہ (Consine) تفاعلوں کی قیمت حدود 1+ اور 1- کے درمیان بدلتی رہتی ہے اس لیے نقل مکان "X" میں تبدیلی، حدود A+ اور A- کے مابین ہوگی۔ اس طرح مختلف حیطہ ارتعاش کی متعدد حرکتیں مساوات 13.8 کے حل کی طور پر ہمیں حاصل ہو سکتی ہیں۔ لیکن یہ تمام حرکتیں ایک ہی تعدد ارتعاش (Frequency) کی ہوں گی۔

یہاں اس بات کی وضاحت ضروری ہے کہ کسی سادہ موسیقی حرکت کا تعدد ارتعاش، حیطہ ارتعاش کے غیر تابع رہتا ہے۔

13.5.3 δ کا طبیعی مفہوم اور اہمیت

مقدار $(\omega t + \partial)$ حرکت کی ہیئت (Phase) کہلاتی ہے جس سے حرکت کی حالت کا اندازہ ہوتا ہے۔ دو حرکتیں ایک ہی تعدد اور ایک ہی حیطہ ارتعاش کی ہو سکتی ہیں لیکن ان کی ہیئتوں میں فرق ہو سکتا ہے۔ اگر $\delta = 0$ ہو تو نقل مکان کی مساوات صرف $X = A\,Cos\,\omega t$ ہو جاتی ہے اور $(t = 0)$ پر نقل مکان کی قیمت اعظم یعنی "A" ہوگی

اگر $\partial = \frac{\pi}{2}$ تو

$$x = a\cos\left(\omega t - \frac{\Pi}{2}\right) = A\sin\omega t$$

اب $t = 0$ پر نقل مکان صفر ہوگا یعنی $A = 0$ ۔

مقدار δ کو ہیئتی مستقل کہا جاتا ہے۔ ذرے کے ابتدائی مقام اور اس کی ابتدائی رفتار سے اس کے حیطہ ارتعاش A اور ہیئتی مستقل 'δ' کی تعین ہوتی ہے۔

13.6 سادہ موسیقی حرکت کی مقادیر میں بہ لحاظ وقت تبدیلیاں

(i) نقل مکان $\quad x = A\,Cos(\omega t + \delta)\,; \quad x_{Max} = A \quad (13.11)$

ii) رفتار $V = \frac{dx}{dt} = -A\omega\{\sin(\omega t + \delta)\}$ (13.12)

اعظم ترین رفتار کی قیمت $V_{max} = A\omega$ (i)

iii) اسراع $\vec{a} = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$ (13.13)

اعظم ترین اسراع کی قیمت $\vec{a}_{Max} = A\omega^2$

(iv) توانائی بالقوہ $u = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$ (13.14)

v) توانائی بالقوہ کی قیمت صفر اور اعظم ترین حدود کے درمیان بدلتی رہتی ہے۔

vi) توانائی بالحرکت $k = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m \cos^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \left(\because \frac{k}{m} = \omega^2\right) \quad (13.15)$$

$$k_{Max} = \frac{1}{2} k A^2$$

توانائی بالحرکت کی قیمت صفر اور اعظم ترین حدود کے درمیان بدلتی رہتی ہے ۔

vii) مجموعی توانائی $E = K + u = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$

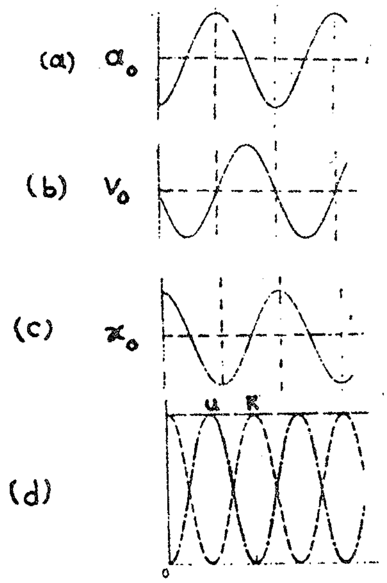
$$= \frac{1}{2} k A^2 \quad (13.16)$$

اس طرح مجموعی میکانی توانائی مستقل رہتی ہے ۔ اعظم ترین نقل مکاں کے مقام پر توانائی بالحرکت تو صفر ہوتی ہے لیکن توانائی بالقوہ اعظم ترین یعنی $\left[\left(\frac{1}{2}\right) k A^2\right]$ ہوتی ہے ۔

مقام توازن پر توانائی بالقوہ صفر ہوتی ہے تو توانائی بالحرکت اعظم ترین یعنی $\left[\left(\frac{1}{2}\right) k A^2\right]$ ہوتی ہے ۔

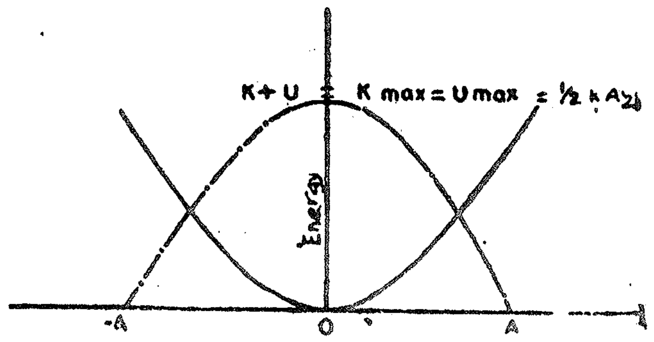
کسی اور مقام پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کی قیمتوں کا انحصار ذرے کے مقام پر ہوتا ہے ، اور ہر مقام پر ان دونوں کا مجموعہ $\left[\left(\frac{1}{2}\right) k A^2\right]$ کے برابر ہوتا ہے ۔ یہاں ایک اہم بات نوٹ کر لینی چاہیئے کہ ہر مقام پر مجموعی توانائی حرکت کے حیطۂ ارتعاش کے مربع کے متناسب ہے۔

شکل (13.3) میں مذکورہ بالا مقادیر میں وقت کے ساتھ ہونے والی تبدیلیوں کو بتلایا گیا ہے ۔



شکل (13.3) وقت کے لحاظ سے ہونے والی تبدیلیاں جو ایک سادہ موسیقی اہتزازیہ کے
(a) اسراع (b) رفتار (c) نقل مکان اور (d) توانائی میں رونما ہوتی ہیں۔

شکستہ لائن سے توانائی بالحرکت K کو اور مسلسل لائن سے توانائی بالقوہ (U) کو ظاہر کیا گیا ہے



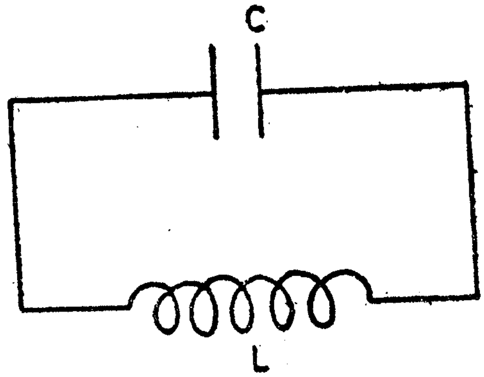
شکل (13.4) ایک سادہ موسیقی اہتزازیہ کی توانائیاں

شکستہ لائین سے توانائی بالحرکت $k(x) = \left[\left(\frac{1}{2}\right) m\, V^2\right]$ اور غیر شکستہ لائن سے توانائی بالقوہ
$U(x) = \left[\left(\frac{1}{2}\right) k\, x^2\right]$ کو تعبیر کیا گیا ہے ۔

تغیر پذیر طبیعی مقدار	اعظم ترین نقل مکاں کے مقام پر	مقام توازن پر
1۔ نقل مکاں (x)	اعظم ترین (A)	صفر
2۔ رفتار $(\vec{V})$	صفر	اعظم ترین $(A\omega)$
3۔ اسراع $(\vec{a})$	اعظم ترین A	صفر
4۔ توانائی بالقوہ (U)	صفر	صفر
5۔ توانائی بالحرکت (K)	صفر	$\left(\frac{1}{2}\right) k A^2$
6۔ مجموعی میکانی توانائی (E)	$\left(\frac{1}{2}\right) k A^2$	$\left(\frac{1}{2}\right) k A^2$

مساوات (13.8) میں مشمول طبیعی تن کی تشریح الفاظ ذیل میں کی گئی ہے ۔
سادہ موسیقی حرکت ایک ایسی حرکت ہے جس میں ذرے کا اسراع نقطہ توازن سے اس کے فاصلے یعنی نقل مکان کے ساتھ ہمیشہ راست متناسب ہوتا ہے اور اس کی سمت ہمیشہ نقطہ توازن کی جانب ہوتی ہے ۔ جیسا کہ پہلے ذکر ہوچکا ہے ، سادہ موسیقی حرکت کی یہ میکانی (Mechanical) مثال ہے ۔ لیکن یاد رکھنا چاہیئے کہ نقل مکان کے مانند اور بھی دیگر طبیعی مقادیر ہیں جن میں وقت کے ساتھ ہونے والی تبدیلیوں کو مساوات (13.6) کے مشابہ مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ان مقادیر میں بھی سادہ موسیقی اہتزاز واقع ہوتا ہے ۔

مثلاً ایک برقی دور پر غور کیجئے جس میں بموجب شکل (13.5) "L" امالیت والے لچھے کو "C" گنجائش والے برقی مکثفہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑا گیا ہے ۔



شکل (13.5) مکثفہ کے برقی بھرن کا اہتزازی اخراج

فرض کرو کہ ایک مکثفے کو ایک خاص مقدار برق تک برقایا گیا ہے جس کا اخراج ایک امالی لچھے میں ہورہا ہے اس اخراج میں وقت کے ساتھ ہونے والی تبدیلیوں کو ذیل کی تفرقی مساوات سے بتلایا جاتا ہے یعنی

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{Lc} = 0$$

جہاں لمحہ "t" پر برقی بھرن کی مقدار Q ہے۔
دیکھنے پر فوراً پتہ چلتا ہے کہ اوپر کی مساوات، مساوات 13:6 کے عین مشابہ ہے یوں

$$Q \longrightarrow x \quad \text{اور}$$

$$\frac{1}{LC} \longrightarrow \omega^2$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$4\pi^2 f^2 = \frac{1}{LC} \qquad \because \omega = 2\pi f$$

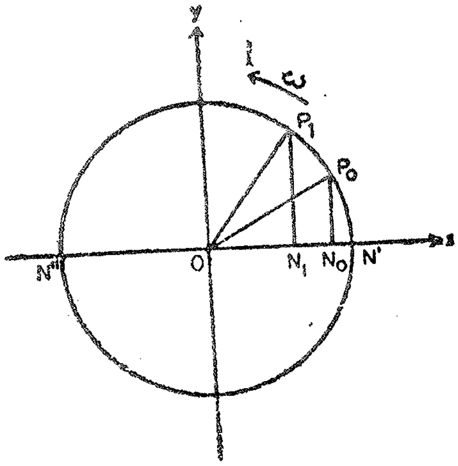
لہذا تعدد "f" ہوگا

$$\text{تعداد} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

مذکورہ بالا تعدد سے مکثفہ کی دوری چارجنگ (Charging) اور ڈسچارجنگ (Dis charging) عمل میں آتی ہے ۔اس مظہر کو مکثفے کا اہتزازی اخراج کہا جاتا ہے ۔ جو برقی اہتزاز کی ایک مثال ہے ۔

13.7 سادہ موسیقی حرکت اور یکساں دائروی حرکت

فرض کرو کہ ایک نقطہ "P" یکساں زاوئی رفتار " ω " کے ساتھ ایک دائرہ پر حرکت کررہا ہے جس کا نصف قطر "A" ہے اور اس کا مرکز محددوں کا مبدا بھی ہے ۔ تب بموجب شکل (13.6) دائرہ کا ایک قطر x۔ محور ہوجاتا ہے جو افق کے متوازی ہے ۔



شکل (13.6) کسی بھی قطر پر یکساں دائروی حرکت کے ظل (Projection) کی حرکت جو سادہ موسیقی ہے۔

ابتداً وقت $t=o$ پر نقطہ کا مقام "p_o" ہے اس وقت نصف قطر x۔ محور سے زاویہ δ پر مائل ہے۔ اور x۔ محور پر P_o کا ظل N_o ہے۔ کسی وقفے "t" کے بعد نقطہ کا مقام p_1 اور اس کے ظل کا مقام N_1 بنتا ہے۔ وہ زاویہ P_oOP_1 ہے جو وقت $t = \omega t$ میں طے ہوتا ہے۔

i) N_1 میں ہونے والا نقل مکان ON_1 ہے جب کہ اس کی پیمائش مبدا "O" سے کی جائے۔

$$ON_1 = x = OP_1 \text{ Cos } P_1 ON_1$$

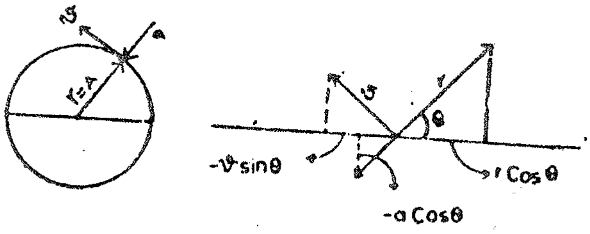
$$= A \text{ Cos } (\omega t + \delta)$$

ii) N_1 کی رفتار "P_1" کی خطی رفتار (Linear Velocity) "V" کے افقی جز کے برابر ہوگی جو کہ $V \sin(\omega t + \delta)$ کے برابر ہے۔

iii) N_1 کا اسراع P_1 کے اسراع کے افقی جز کے برابر ہوتا ہے۔ لیکن "P" کا اسراع جو مرکز کی طرف رخ کئے ہوئے ہے یہ $= \omega^2 A \quad \frac{V^2}{A}$ کے برابر ہے۔

N_1 کے اسراع کی مقدار ہوگی $\omega^2 A \cos(\omega t+\delta)$

شکل (13.7) میں ان مختلف مقداروں کی سمتوں کو بتلایا گیا ہے ۔



شکل (13.7) سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کے نقل مکان، اس کی رفتار اور اسراع کی سمتیں [$\theta = (\omega t+\delta)$]

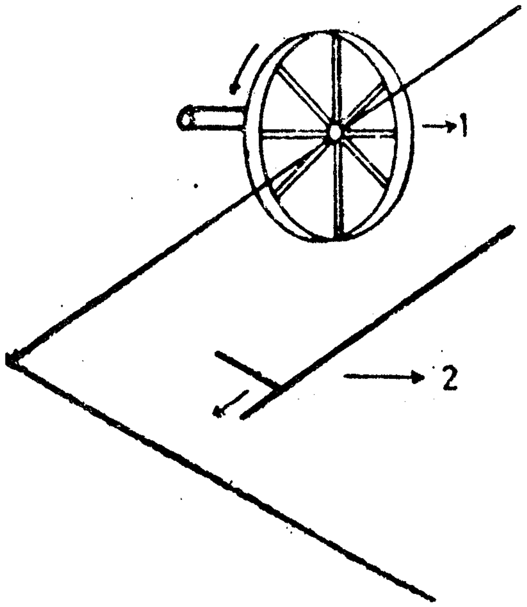
جوں جوں نقطہ "P" یکساں دائروی حرکت کرتا ہے، اس کے ساتھ اس کا ظل "N" خط مستقیم $N'ON''$ پر "O" کے آگے پیچھے، حدود N' اور N'' کے اندر متحرک رہتا ہے اس طرح کہ $(ON' = ON'' = A)$

"N" کے نقل مکان اس کی رفتار اور اسراع کے لئے اخذ کردہ ضابطوں کا مقابلہ سکشن (13.6) کی مساواتوں (13.12)، (13.11) اور (13.13) سے کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ N کی حرکت بالکل سادہ موسیقی ہے ۔ اگر ظل کو X ـ محور کی بجائے Y محور پر لیا جائے تو نقل مکان Y کے لئے حاصل ہونے والی مساوات ہوگی:

$$Y = A\sin(\omega t+\delta) = A\cos\left(\omega t + \delta - \frac{\Pi}{2}\right)$$

یہ بھی ایک سادہ موسیقی حرکت ہے جو ہیت (Phase) میں سابقہ حرکت سے بقدر $\left(\frac{\Pi}{2}\right)$ مختلف ہے لہذا ثابت ہوا کہ دائرہ کے کسی بھی قطر پر ایک یکساں دائروی حرکت کے ظل کی حرکت "سادہ موسیقی حرکت" ہوتی ہے ۔

اسی چیز کو ذیل میں ایک آسان طریقے سے دکھایا گیا ہے ۔



شکل (13.8) مستقل زاوائی رفتار سے حرکت کرنے والے ایک پہیے کے ایک نقطے کا ظل
1۔ پہیہ اور اس کا دستہ 2۔ اوپر سے آنے والی روشنی سے بننے والا سایہ۔

ایک پہیے کو ایک سطح پر اس طرح رکھو کہ ایک دور رکھے ہوئے مبدا نور کی وجہ سے سطح پر پہیے اور اس کے دستے کا سایہ ایک خط مستقیم بناسے جیسا کہ شکل 13.8 میں دکھایا گیا ہے۔ پہیے کے محیط سے جڑے ہوئے دستے کا سایہ، پہیے کے محیط پر کے کسی نقطہ کا ظل ہوگا اور یہ پہیے کے سائے کی مستوی میں ہوگا۔ جب پہیا گھومتا ہے تو دستے کا سایہ، پہیے کے خطی سائے کے ساتھ ساتھ آگے پیچھے سادہ موسیقی اہتزازی حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے۔

شکل 13.6 میں دکھایا ہوا دائرہ، جس کے محیط پر " P " متحرک ہے، حوالے کا دائرہ کہلاتا ہے۔ اور نقطہ " P " کو حوالے کا نقطہ کہتے ہیں اس سے معلوم ہوا کہ

i) حوالے کے دائرہ کا نصف قطر، سادہ موسیقی حرکت کا حیطہ ہے اور

ii) " (ω) " حوالے کے نقطے کی زاوائی رفتار ہے اور " f " سادہ موسیقی حرکت کا تعدد

13.8 دو باہم علی القوائم سادہ موسیقی حرکتوں کا حاصل

فرض کرو کہ ایک ہی تعدد کی دو سادہ موسیقی حرکتیں ہیں۔ ان میں سے ایک محور X کے ساتھ ہے اور دوسری محور Y کے ساتھ۔ ان حرکتوں کو ذیل کی مساواتوں کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$x = A \cos(\omega t + \delta_1)$$
$$Y = B \cos(\omega t + \delta_2) \qquad (13.7)$$

(i) صورت اول

اگر دونوں کے ہیئتی مستقل وہی ہیں، اس طرح کہ $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ یعنی

$$X = A \cos(\omega t + \delta)$$
$$Y = B \cos(\omega t + \delta)$$

$$Y = \left(\frac{B}{A}\right) x$$

یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے جس کی ڈھلان $\left(\frac{B}{A}\right)$ ہے۔ لہذا یہ حرکت ایک خطی حرکت ہوگی اور خط کے ڈھلان کو ان حرکتوں کے حیطہ ہائے ارتعاش کی نسبت سے معلوم کرلیا جاسکتا ہے۔ اور اگر ان کے حیطہ ارتعاش بھی ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو یہ خط دونوں محوروں سے ایک ہی زاویہ (یعنی 45°) پر مائل ہوگا۔

ii) دوسری صورت

اگر ہیئتی مستقلوں میں $\left(\frac{\Pi}{2}\right)$ کا تفاوت ہوتو $\delta_1 - \delta_2 = \frac{\Pi}{2}$

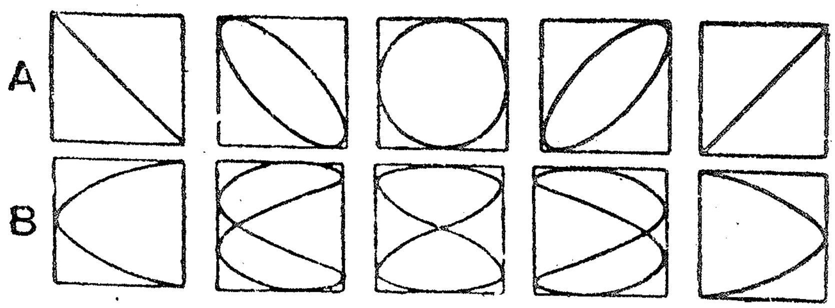
$$x = A \cos(\omega t + \delta_1)$$
$$y = B \cos(\omega t + \delta_2)$$
$$= B \cos(\omega t + \delta_1 + \Pi/2)$$
$$= B \sin(\omega t + \delta_1)$$

یہاں "x" اعظم ہوگا جب کہ $Y = O$ اور اس طرح جب $x = o$ تو Y اعظم ہوگا۔ اور حاصل حرکت کی شکل ناقص کی شکل کی ہوگی۔ اور اگر حیطہ ارتعاش مساوی ہوجائیں یعنی $(A = B)$ تو حاصل حرکت دائروی ہوگی۔

عام طور پر ایک ہی تعدد کی دو یا باہم علی القوائم سادہ موسیقی حرکتوں کی تمام ترکیبوں (Combinations) کا طریق ناقص ہی ہوتا ہے۔ دائرہ اور خط مستقیم، ناقص کی دو خاص صورتیں ہیں۔

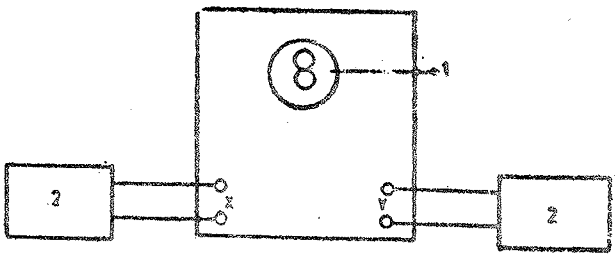
ناقص کے وضع اور سمت کا تعین دونوں حرکتوں کے حیطہ ارتعاش میں نسبت ($\frac{B}{A}$) اور ہیئتوں کے تفاوت $(\delta_1 - \delta_2)$ سے ہوتا ہے۔ حاصل حرکت کی سمت (گھڑی کی سوئیوں کی سمت یا اس کے مخالف) کا دارمدار اس پر ہوتا ہے کہ بلحاظ ہیئت دونوں میں سے کونسی حرکت دوسری سے آگے ہے۔ اب اگر ان اجزاء کے تعدد بھی مختلف ہوں تو نقطے کے طریق سے ہمیں مختلف شکلیں حاصل ہوں گی۔

ان شکلوں کو لساجو (Lissa jous) کی شکلیں کہتے ہیں۔ اگر ہر جز کا تعدد، اس کے ارتعاش کا حیطہ اور ان دونوں اجزاء میں تفاوت ہیئت معلوم ہوں تو تمام اجزاء کے حاصل کی شکل ہندسی طریقے سے مل جاتی ہے شکل (13.9) میں ایسی چند شکلوں کو بتایا گیا ہے۔



شکل (13.9) لساجو کی شکلیں (A) مساوی تعدد (B) تعدد میں 2:1 کی نسبت۔

اہتزاز پیما (Oscilloscope) کی مدد سے بموجب شکل 13.10 ان شکلوں کو آسانی کے ساتھ دکھایا جاسکتا ہے۔



شکل (13.10) کیتھوڈ شعاعوں کے اہتزاز پیما (C R O) کا بلاک ڈیاگرام (Block Diagram)

1۔ فلوریسنٹ اسکرین 2۔ آڈیو اہتزازیہ X ، Y ۔ تختیاں (Piates)

آلے کی اس ترتیب میں دو باہمی علی القوائم برقی میدانوں کے ذریعہ الکٹرانس کو منصرف کیا جاتا ہے (X۔ اور Y۔ تختیاں)۔ دونوں سادہ موسیقی حرکتوں کو، برقی اہتزازوں کی شکل میں، اہتزاز پیما، کی تختیوں (X) اور (Y) عائد کیا جاتا ہے۔ ان کے حیطوں اور ان کی ہیئتوں میں تبدیلی بھی کی جاسکتی ہے۔ اس طرح کے عمل سے، فلوریسنٹ اسکرین پر الکٹرانس سے مرتسم کی ہوئی لیساجوکی شکلوں کے متعدد نمونے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

ایک رقاص کو مختلف میکانی طریقوں سے جھلا کر بھی ان نقشوں کو حاصل کیا جاسکتا ہے جب کہ اس کے اہتزاز ایک ہی انتصابی مستوی تک محدود نہ ہوں۔

دو علی القوائم سادہ موسیقی حرکتوں کے حاصل کی، عرکت مقطب نور کی تشریح کے ضمن میں بڑی اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔

حل شدہ مثال 1

ایک جسم سادہ موسیقی ارتعاش کررہا ہے۔ اس کا حیطہ ارتعاش 0.15 m ہے اور تعدد 4 Hz ہے

(a) اس کی رفتار اور اسراع کی اعظم ترین قیمتیں معلوم کرو (b) 0.09 m نقل مکان کے لیے اس کی رفتار اور اسراع کو معلوم کیجیے۔ (c) مقام توازن سے 0.12 m دور ایک نقطے تک نقل مکاں کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا۔

حل۔

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

موجودہ صورت میں

$$\omega = 2\Pi f = 2\Pi \times 4 = 8\,\Pi \text{ Rad / See}^{-1}$$ اور $A = 0.15$ m

$$x = 0.15 \cos(8\Pi t + \delta)$$

(a) رفتار

a) $$V_{max} = A\omega = 3.77 \text{ m/s}$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0.15\,(8\Pi)^2 = 94.7 \text{ m/s}^2$$

(b) نقل مکان

b) $$x = 0.09 \text{ m}$$

$$0.09 = 0.15 \cos(\omega t + \delta)$$

$$\cos(\omega t + \delta) = 0.6$$

$$\sin(\omega t + \delta) = 0.8$$

رفتار کی مقدار

$$V = \omega A \,\mathrm{Sin}\,(\omega t+\delta)$$

$$= 3.77 \times 0.8$$

$$= 3.01 \text{ m/s}$$

اسراع کی مقدار

$$a = \omega^2 A \,\mathrm{Cos}\,(\omega t + \delta)$$

$$= 94.7 \times 0.6$$

$$= 56.80 \text{ m/s}^2$$

(c) فرض کرو کہ وقت t_1 پر جسم اپنے مقام توازن $(X = O)$ پر ہے اور جب جسم اپنے مقام توازن سے 0.1m دور ہوتا ہے تو وقت t_2 ہے۔

$$\mathrm{Cos}\,(8\Pi t_1 + \delta) = 0 \qquad \therefore (8\Pi t_1 + \delta) = 90^\circ = 0.5\,\Pi$$

$$\mathrm{Cos}\,(8\Pi t_2 + \delta) = \frac{0.12}{0.15} = 0.8; \quad (8\Pi t_2 + \delta) = 36 = 0.2\,\Pi$$

$$t_2 - t_1 = \frac{0.3}{8} = 0.038$$

اس لیے مقام توازن سے 0.12 m نقل مکان کے لئے درکار وقت 0.036 سکنڈ ہے۔

حل شدہ مثال 2

ایک سادہ موسیقی حرکت میں، اگر نقل مکان، حیطہ کا نصف ہو تو ثابت کرو کہ اس کی توانائی بالقوہ $\frac{1}{4}$ (E) اور توانائی بالحرکت $\frac{3}{4}$ (E) جہاں (E) اس کی مجموعی توانائی ہے۔ اگر اس کی توانائی کی نصف توانائی بالقوہ اور نصف توانائی بالحرکت ہو تو نقل مکان کتنا ہوگا۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{نقل مکان}$$

اور

$$V = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad \text{رفتار}$$

$$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\therefore \cos(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\omega t + \delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{\omega A\sqrt{3}}{2} \quad \text{رفتار}$$

توانائی بالقوہ

$$= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{kA^2}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{kA^2}{2}\right) = \frac{1}{4}E$$

$$E = \frac{kA^2}{2} \quad \text{کیونکہ}$$

$$\text{توانائی بالحرکت} \quad \therefore K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{8}kA^2 \quad \left(\because \omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}k^2A\right) = \frac{3}{4}E$$

فرض کرو کہ نقل مکان " X " پر اس کی توانائی کی نصف توانائی بالقوہ ہے اور نصف توانائی بالحرکت، تب

توانائی بالقوہ

$$\mu = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \frac{E}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{KA^2}{2}$$

$$\therefore X = A/\sqrt{2}$$

حل شدہ مثال 3

ایک اہتزاز پیماء میں دو باہمی علی القوائم برقی میدان کے زیر اثر الکٹرانس میں کسی وقت " t " پر ہونے والا انحراف بموجب مساوات ذیل واقع ہوتا ہے ۔

$$x = A \operatorname{Cos} \omega t$$

$$y = B \operatorname{Cos} (\omega t + \delta)$$

الکٹرانس کے طریق کی مساوات دریافت کرو۔ اور (a) $\delta = 0^\circ$ (b) $\delta = 30^\circ$ اور (c) $\delta = 90^\circ$ پر ان کے راستوں کو بیان کرو۔

حل

$$\operatorname{Cos} \omega t = \frac{x}{A}; \quad \operatorname{Sin} \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

$$\frac{Y}{A} = \operatorname{Cos} (\omega t + \delta) = \operatorname{Cos} \omega t \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Sin} \omega t \operatorname{Sin} \delta$$

$$= \frac{x}{A} \operatorname{Cos} \delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \operatorname{Sin} \delta$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \operatorname{Sin} \delta = \frac{x}{A} \operatorname{Cos} \delta - \frac{Y}{A}$$

طرفین کے مربع لے کر مقادیر کو ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 + y^2 - xy \operatorname{Cos} \delta = A^2 \operatorname{Sin} \delta$$

$$\delta = 0; \quad \operatorname{Cos} \delta = 1; \quad \operatorname{Sin} \delta = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\therefore (x^2 + y^2 - 2xy) = 0$$

$$(x - y)^2 = 0 \qquad \therefore x = y$$

یہ ایک خط مستقیم ہے جو محور x اور y کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہے۔

$$\delta = 30^\circ; \quad \cos\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\delta = \frac{1}{2} \qquad \text{(b)}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A^2}{4}$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}\,xy = A^2$$

یہہ ایک ناقص ہے

$$\delta = 90^\circ; \quad \cos\delta = 0; \quad \sin\delta = 1 \qquad \text{(c)}$$

$$x^2 + y^2 = A^2$$

یہ ایک دائرہ ہے جس کا نصف قطر A ہے۔

13.9 خلاصہ

ایک سادہ موسیقی اہتزازیہ کی توانائی بالقوہ کے تفاعل کی شکل ($u = \frac{1}{2} kx^2$) ہے جہاں K ایک مستقل ہے اور x، نقل مکان۔ اور اس مساوات کا حل ہے ($x = A\cos(\omega t + \delta)$) A سے مراد حیطہ ارتعاش ہے اور ω سے زاوی رفتار اور δ سے حرکت کی ہیئت کی تعبیر ہوتی ہے۔ اعظم ترین نقل مکان پر توانائی بالحرکت صفر اور توانائی بالقوہ اعظم ترین ہوتی ہے۔ مقام توازن پر توانائی بالقوہ صفر اور توانائی بالحرکت اعظم ترین ہوتی ہے۔ جب دو باہمی علی القوائم سادہ موسیقی حرکتوں کو جوڑ دیا جاتا ہے تو حاصل حرکت کی شکل ایک منحنی کی جیسی ہوتی ہے جس کی مشابہت کا انحصار سادہ موسیقی حرکتوں کے تعدد، حیطہ ارتعاش اور ان کے مابین واقع تفاوت ہیئت پر ہوتا ہے۔ ان کے اتحاد سے جو شکلیں حاصل ہوتی ہیں انھیں لساجو کی شکلیں کہتے ہیں۔ ان شکلوں کی خاص صورتیں خط مستقیم دائرہ اور ناقص ہیں۔

13.10 اپنی معلومات کی جانچ: نمونہ جوابات

1. ہرٹز (Hertz) تعدد کی اکائی ہے جو سائکلس فی ثانیہ کے برابر ہے۔ اس کو سائکلس کی تعداد فی ثانیہ میں ظاہر کرتے ہیں۔

13.11 نمونہ امتحانی سوالات

مشق

I ذیل کے سوالات کے جواب تقریباً تیس سطروں میں دیجیے۔

1 سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات کو وضع کیجیے اور اس کا حل حاصل کیجیے۔

2 سادہ موسیقی حرکت کی صورت میں ذیل کی مقداریں وقت کے لحاظ سے کس طرح بدلتی ہیں۔

(a) نقل مکان (b) رفتار (c) اسراع (d) توانائی بالقوہ (c) توانائی بالحرکت تبدیلیاں گراف کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

3 ایک ہی تعدد کی دو باہم علی القوائم سادہ موسیقی حرکتوں کے اتحاد سے حاصل ہونے والی حرکت پر بحث کیجیے۔

II ذیل کے سوالات کے جواب تقریباً دس سطروں میں دیجیے۔

1 موسیقی حرکت اور سادہ موسیقی حرکت میں تمیز کیجیے۔

2 مساوات $x = A \cos (wt + \delta)$ میں A ، W اور δ کی طبیعی اہمیت کو سمجھائیے۔

3. کسی بھی قسم کی غیر بقائی قوت (Non- Conservative Force) کی عدم موجودگی میں ثابت کیجیے کہ ایک سادہ موسیقی اہتزاز یہ کی مجموعی توانائی مستقل رہتی ہے۔ یہ توانائی حرکت کے حیطہ ارتعاش کے مربع کے ساتھ راست متناسب ہوتی ہے۔

4. یکساں دائروی حرکت اور سادہ موسیقی حرکت میں کیا مطابقت ہے؟

5. لساجو کی شکلوں سے کیا مراد ہے؟

III . ذیل کے سوالات حل کیجیے۔

i (a) ایک ذرہ جس کی کمیت 15 gm ہے۔ محور X پر سادہ موسیقی حرکت کررہا ہے۔ اس کا حیطہ ارتعاش 5 cm ہے اور کسی وقت "t" کا یہ اپنے مقام توازن سے 10 cm فاصلے پر ہو تو ذرے کے مقام کی مساوات لکھیے جب کہ یہ حرکت کے ایک سائیکل کو ختم کرنے کے لیے دو سکنڈ لیتا ہے۔

(b) سے میں مذکورہ حرکت پیدا کرنے والی قوت کی مساوات لکھیے۔

(c) x کی کن قیمتوں کے لئے ذرے کی رفتار اعظم ترین ہوگی۔

(d) x کی کن قیمتوں کے لئے ذرے کا اسراع اعظم ترین ہوگا۔

(جواب (a) $x = 10 + 5 \sin \Pi t$ (b) $F = -75 \Pi^2 \sin \Pi t$; (c) 10 cm ; (d) 5.15 cm

2 ایک گھڑی کے چرخ توازنی (Balance Wheel) کا زاوائی تعدد π ریڈیانس اور وقت دوران 0.5 Sec ہے۔

(a) اعظم زاوی رفتار (b) زوائی رفتار جب کہ نقل مکان حیطہ ارتعاش کا نصف ہو۔ (c) 45° کے نقل مکان پر اس کا زاوی اسراع دریافت کیجئے۔

(جواب (a) 40 ریڈیانس فی ثانیہ (b) 34 ریڈیانس فی ثانیہ (c) 120 ریڈیانس فی ثانیہ)

3 اسپرنگ والی تراز کے پیمانے پر صفر تا 32 پونڈ تک وزن کو بڑھنے کے لئے 6 انچ لمبی اسکیل استعمال کی گئی ہے۔ ایک جسم کو اس ترازو سے لٹکانے پر اس میں ہونے والے انتصابی اہتزازوں کی تعداد 1.5 ارتعاش فی ثانیہ حاصل ہوئے جس کا وزن معلوم کیجیے۔

(جواب 23 پونڈ)

مصنف ڈاکٹر لیس۔ راگھون

مترجم محمد معین الدین حسن